Introduction de la notion d'équation différentielle : une interaction sciences physiques - mathématiques

Evolution temporelle d'un système, relevé expérimental de mesures ; traitement des données pour une modélisation par une équation différentielle, résolution par la méthode d'Euler et validation par confrontation aux données expérimentales Introduction des fonctions exponentielles

Sommaire

Introduction

1. La prise de température de la main à l'aide d'une sonde
2. Evolution de la température : étude du taux de variation $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$
3. Résolution numérique, par la méthode d'Euler, de l'équation différentielle introduite par l'hypothèse du physicien et confrontation aux données expérimentales
4. Une introduction du modèle exponentiel en mathématiques par l'étude de propriétés de la liste des mesures expérimentales de température
5. Conclusion

Annexes

A CBL 2 « pour les nuls » : mode d'emploi
B Méthode d'Euler avec CellSheet pour $y' = f$, f fonction donnée ($1^{ère}$ S, Tle S)
C Méthode d'Euler avec CellSheet pour $y' = a\,y + b$ (a et b donnés par l'expérience)
D Programmes de la méthode d'Euler pour $y' = a\,y + b$ (a et b donnés par l'expérience)
E Un autre exemple d'évolution temporelle d'un système : mesure de tension lors de la décharge d'un condensateur

Introduction

L'approche pédagogique présentée ici utilise la technologie Texas Instruments :

- recueil de données expérimentales par l'interface CBL 2 ;
- traitement de ces données dans l'éditeur de listes et l'application graphique de toute calculatrice ;
- utilisation, pour la méthode d'Euler, du tableur CellSheet supporté par les calculatrices TI 89, 92 plus et Voyage 200 ou de programmes simples sur toute calculatrice.

L'introduction en terminale scientifique de l'équation différentielle $y' = a\,y + b$ et sa résolution sont proposées ici par une approche complémentaire en sciences physiques et mathématiques : des résultats expérimentaux sont utilisés pour la mise en place d'un modèle théorique, les prédictions permises par ce modèle sont ensuite confrontées aux données expérimentales en vue de valider la pertinence du choix de modèle.

Ce travail commun, souhaité par les instructions officielles, a été amorcé lors des journées d'été T^3 2002.

Les expériences retenues pour cette présentation ont été choisies avant tout pour leur simplicité de mise en œuvre et l'intérêt de leur modélisation ; l'utilisation, dans le cours de mathématiques, de relevés de mesures relatifs à un phénomène connu peut permettre d'introduire avec plus de facilité les objets mathématiques nouveaux que sont équation différentielle et fonction exponentielle, enrichis par l'exploitation qui en est faite dans le cours de physique.

Plusieurs scénarios peuvent être envisagés : le professeur de mathématiques peut conduire dans son cours l'ensemble de la séquence, y compris l'expérience et la saisie de mesures correspondante. S'il souhaite, même pour un bref moment, ne pas se substituer au professeur de physique, il peut aussi demander aux élèves de conduire l'expérience et saisir les données chez eux ou en travaux pratiques de sciences physiques.

La situation expérimentale choisie ici est la **prise de température du corps** ; facile à appréhender (chacun a été amené à effectuer de tels relevés pour savoir s'il a ou non de la fièvre), cette situation favorise l'anticipation lors de l'observation de l'évolution de la température au cours du temps. Un relevé de mesures par l'interface CBL 2 sera effectué ; un traitement numérique de ces données conduira le physicien à émettre une hypothèse sur la nature du lien entre le taux de variation de la température $\Delta\theta/\Delta t$ et la température θ. Cette hypothèse conduira à la modélisation de l'évolution du système par une équation différentielle. Sa résolution numérique par la méthode d'Euler sera confrontée aux données expérimentales et viendra conforter la pertinence du choix de modèle. Un traitement mathématique amorcera la construction de la solution de l'équation différentielle et permettra d'introduire une fonction exponentielle.

Cette solution analytique, mise en place en mathématiques, n'est plus indispensable aux physiciens ; néanmoins, quand elle est établie, sa connaissance facilite grandement la réflexion et permet de meilleures généralisations .

La même approche est applicable à une multitude d'autres phénomènes, dont l'évolution est décrite par une équation différentielle $y' = a\,y + b$; un deuxième exemple (charge ou décharge d'un condensateur) sera traité dans l'annexe E, à titre de généralisation.

1. La prise de température de la main à l'aide d'une sonde

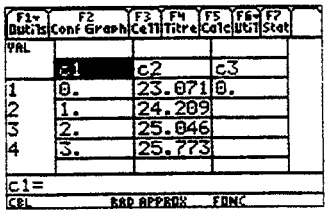
Une sonde de température placée dans une pièce à une vingtaine de degrés, est mise soudainement au contact de la main et y est maintenue fermement pendant une minute environ.

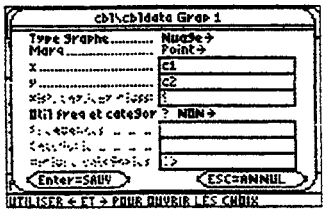
Le contact des surfaces entraîne une montée de température dans la sonde, rapide au départ puis de plus en plus lente.

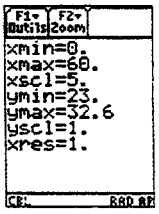
Chaque élève disposant d'un thermomètre et d'une montre peut observer ce phénomène et noter, dans un tableur-grapheur, la température toutes les deux secondes.

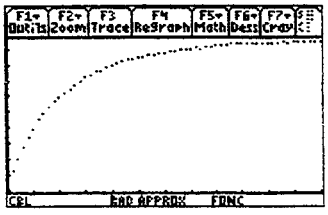
Une calculatrice ou un ordinateur, munis d'une interface d'acquisition appropriée, peut saisir ces données automatiquement toutes les secondes en une minute environ.

Voici les résultats d'une expérimentation comportant 61 mesures saisies toutes les secondes : les mesures captées par le CBL sont directement transmises à la calculatrice, le temps en seconde et la température en degré Celsius dans les listes L_1 et L_2 du tableur de la TI 83 (accès par STAT Edite) ou dans les listes c1 et c2 du fichier cbldata des TI 89, 92 et V200 (accès par APPS 6:Editeur données 1:Courant).



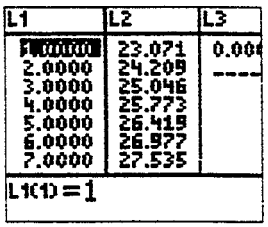


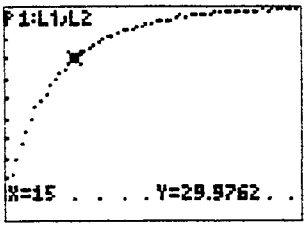




Ci dessus sur TI 89, 92 et V200

Ci contre sur TI 83





2. Evolution de la température : étude du taux de variation $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$

Bien que les mesures soient imprécises, ce traitement numérique des données expérimentales va permettre d'introduire une équation différentielle modélisant l'évolution de température, cohérente avec les valeurs extrêmes fournies par l'expérience.

a) Evolution temporelle du taux de variation

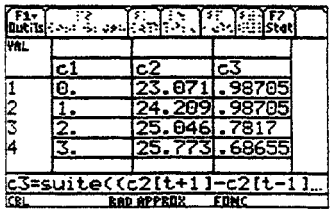
En mathématiques, le taux de variation d'une fonction $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ fournit, pour h assez proche de zéro, une approximation du nombre dérivé $f'(x)$. Calculé à partir de mesures expérimentales, le taux de variation $f(x+1) - f(x)$ pour h = 1 (ce qui correspond à la situation traitée ici où l'écart de température entre deux mesures est d'une seconde) est une approximation assez imprécise de $f'(x)$, du fait des incertitudes de mesure et surtout de la valeur trop grande de l'accroissement h de la variable.

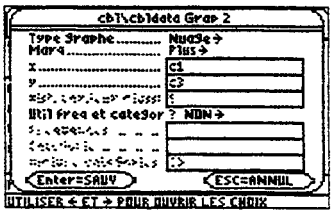
Dans une évolution continue, le « nombre dérivé symétrique », utilisé en physique, est compté sur deux intervalles : $\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2\,h}$ donne une meilleure approximation de $f'(x)$, comme le laisse entrevoir une interprétation graphique : à partir d'un nombre fini de points, la représentation graphique de f est ainsi approchée par des cordes se chevauchant deux à deux, assurant ainsi un certain lissage de la courbe . Dans l'éditeur de listes de la calculatrice, le taux de variation $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ est calculé en L_3 selon l'instruction :

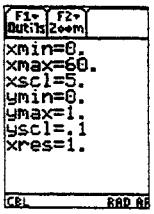
L_3 = suite(($L_2(x+1) - L_2(x-1)$)/2 , x , 2 , n-1) , n étant le nombre de données (ici n-1=60).

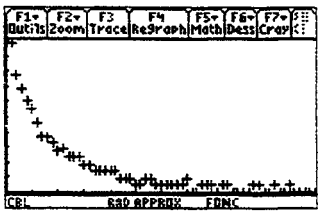
La liste L_3 ainsi créée est plus courte que les listes L_1 et L_2 : il y manque le premier et le dernier terme. Or l'affichage du graphique (L_1,L_3) exige des listes de même dimension : on veillera donc, soit à supprimer le premier et le dernier terme de L_1, soit à dupliquer dans L_3 la valeur initiale et la valeur finale, commettant ainsi une petite erreur systématique.

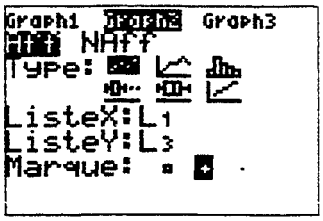
Remarque : Sur TI 89, 92 ou V200, la duplication de la cellule c3[1] nécessite la suppression de la formule notée en c3 ci-dessous, ce qui heureusement n'efface aucune donnée ; on insère alors (touche F6) une cellule avant c3[1], on copie c3[2] et on colle en c3[1] ; l'insertion de la dernière cellule se fait ensuite sans difficulté.

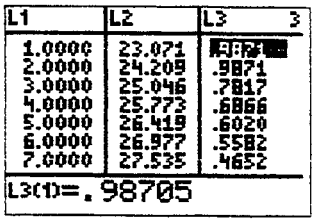


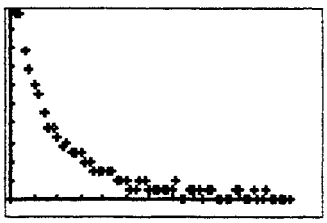












On observe que la décroissance du taux de variation $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ en fonction du temps t est d'abord rapide puis de plus en plus lente .

b) L'hypothèse du physicien et sa confirmation expérimentale

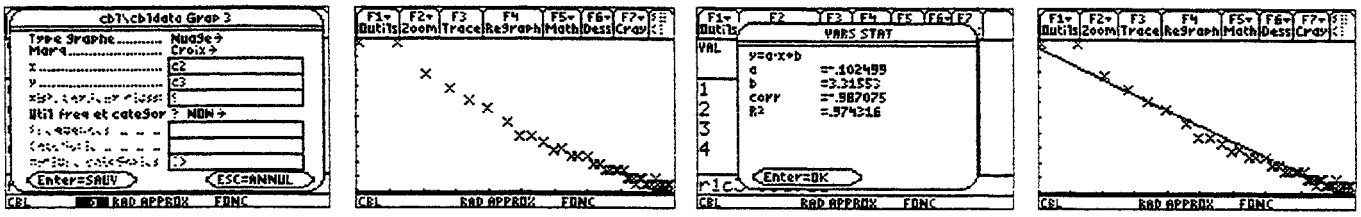
A chaque instant, le taux de variation $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ dépend de l'écart résiduel entre la

température courante et la température finale correspondant à l'état d'équilibre thermique de la sonde dans la main : $\theta_L \approx 32{,}5$ degrés Celsius.

Le physicien émet l'hypothèse que le taux de variation $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ est **proportionnel** à l'écart $\theta - \theta_L$, la constante de proportionnalité k décrivant la nature du contact thermique entre la sonde et la main : $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = k\,(\theta - \theta_L)$. Cette hypothèse est cohérente avec l'état final : lorsque la température θ atteint la température d'équilibre θ_L, l'évolution est achevée : $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ est nul.

L'hypothèse revient donc à dire : la décroissance $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ en fonction de la température θ suit un modèle affine.

Cherchons une confirmation expérimentale de cette hypothèse avec le graphe (L_2,L_3) accompagné d'une régression linéaire.



La corrélation de la régression linéaire est forte : l'adéquation des données expérimentales au modèle affine est satisfaisante. La constante de proportionnalité k, caractérisant la nature du contact thermique entre la sonde et la main, est fournie par le coefficient a de la régression linéaire : $k \approx -0{,}1025$; la température finale θ_L peut alors être estimée à l'aide du coefficient $b \approx 3{,}3155$: $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = k(\theta - \theta_L) = k\theta - k\theta_L = a\,\theta + b$ donc $\theta_L = -\frac{b}{k} \approx 32{,}25$ (en degrés Celsius). Cette estimation est légèrement inférieure à celle que les derniers relevés de température permettent de conjecturer : 32,5 environ.

L'expérience a ainsi conduit à modéliser l'évolution de la température d'une sonde placée soudainement dans la paume de la main par l'équation $\frac{d\theta}{dt} = a\,\theta + b$; on dit alors que θ est une solution de l'équation différentielle $y' = a\,y + b$.

3. Résolution numérique, par la méthode d'Euler, de l'équation différentielle introduite par l'hypothèse du physicien et confrontation aux données expérimentales

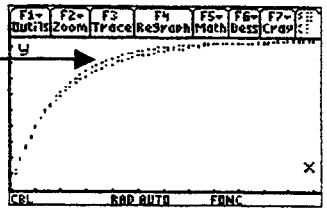
En restant dans le cadre numérique, la méthode d'Euler permet de construire point par point une représentation graphique approchée de la solution θ de l'équation différentielle $y' = a\,y + b$ en fonction du temps.

Elle repose sur l'approximation : $\theta(t + \Delta t) \approx \theta(t) + \frac{d\theta}{dt}(t) \cdot \Delta t$, qui s'écrit, en tenant compte du choix du modèle $\frac{d\theta}{dt} = a\,\theta + b$: $\theta(t + \Delta t) \approx \theta(t) + (a\,\theta(t) + b) \cdot \Delta t$.

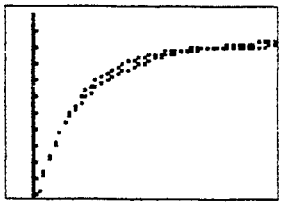
Un pas Δt étant choisi, on obtient ainsi par itération une suite d'approximations $\theta(t_0 + \Delta t)$, $\theta(t_0 + 2\Delta t)$, ... , $\theta(t_0 + k\Delta t)$, ... jusqu'à $\theta(t_{max})$. Ce travail est réalisé dans les annexes C pour une réalisation « manuelle » sur le tableur CellSheet et D pour l'obtention directe par programme.

La représentation graphique des points de coordonnées $(t_0 + k\Delta t\ ,\ \theta(t_0 + k\Delta t))$ réalise une approximation point par point de la courbe intégrale de l'équation $y' = a\,y + b$. Sa superposition au graphe des mesures expérimentales de température réalisé au paragraphe 1 apparaît de bonne qualité, ce qui valide la pertinence du modèle.

Sur l'intervalle [10,30] en abscisse, le nuage obtenu par la méthode d'Euler est situé légèrement au dessus de celui des mesures expérimentales.



Idem sur TI 83 :



Le choix d'une méthode numérique de résolution (ici la méthode d'Euler) a permis de valider le modèle sans nécessiter la connaissance de l'expression analytique de la solution de l'équation différentielle.

4. Une introduction du modèle exponentiel en mathématiques par l'étude de propriétés de la liste des mesures expérimentales de température

Il s'agit de rechercher un modèle fonctionnel décrivant l'évolution de la température dans le temps. La démarche sera guidée par la question : comment la température s'approche-t-elle de l'état limite ?

a) Normalisation des données par anamorphose, afin d'en faciliter le traitement

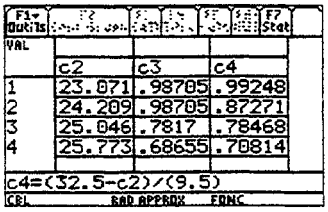
On note θ la fonction température, définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On sait d'après ce

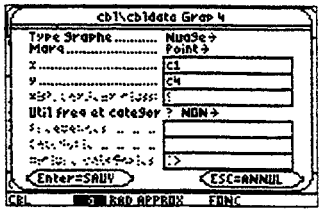
qui précède que θ est une fonction croissante telle que $\theta(0) = 23$[1] et $\lim_{+\infty} \theta = 32{,}5$ (valeur θ_L suggérée par le tableau de mesures et le calcul précédent).

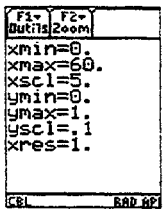
La fonction $t \longmapsto 32{,}5 - \theta(t)$ a donc une limite nulle en $+\infty$ et décroît de 9,5 à 0.

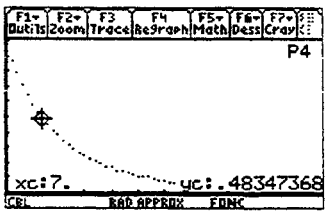
Enfin la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{32{,}5 - \theta(t)}{9{,}5}$ a toujours une limite nulle en $+\infty$ et décroît de 1 à 0.

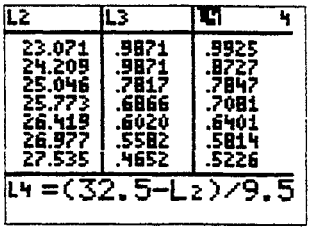
Confirmation graphique : on crée une nouvelle liste $L_4 = (32{,}5 - L_2)/9{,}5$ où les coefficients 32,5 et 9,5 sont liés aux états limites particuliers de l'expérience réalisée (en fait $L_4 = (\theta_L - L_2) / (\theta_L - L_2(1))$) et on affiche le nuage (L_1 , L_4).

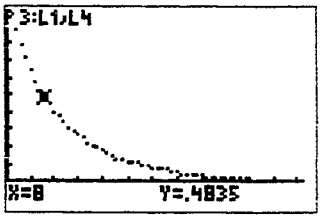












L'observation expérimentale de la température θ a conduit, au paragraphe 2, à exprimer son évolution par l'équation différentielle $\theta' = a\,\theta + b$ (avec $a \approx -0{,}1025$ et $b = -a.\theta_L \approx 3{,}3155$) soit encore : $\theta' = a\,(\theta - \theta_L)$. Qu'est devenue cette relation lors de l'anamorphose $f = \dfrac{32{,}5 - \theta}{9{,}5}$ ou plus exactement $f = \dfrac{\theta_L - \theta}{\theta_L - \theta_0}$? Il s'agit de savoir si f est encore solution d'une équation différentielle.

$\theta' = a\,(\theta - \theta_L) \Leftrightarrow (\theta_L - \theta)' = a\,(\theta_L - \theta)$ et en divisant par $\theta_L - \theta$: $f' = a.f$.

Phase de modélisation de f : elle consiste à construire une fonction mathématique définie sur $\mathbb{R}^+$ (ou même sur $\mathbb{R}$), dérivable, qui respecte l'état initial $f(0) = 1$, l'état limite $\lim_{+\infty} f = 0$ ainsi que son évolution dans le temps, à savoir la proportionnalité avec sa dérivée : $f' = a.f$.

b) Répartition dans le temps des demi évolutions successives de f

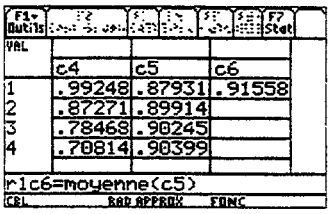
Cherchons sur les données expérimentales la demie vie de l'évolution de f, c'est-à-dire la date T pour laquelle $f(T) = 0{,}5$; l'utilisation de Trace dans l'application graphique (voir le dernier écran TI 89 ci-dessus, où xc=7 correspond à t=8 car le premier point représenté a pour abscisse xc=0) donne T compris entre 7 et 8 ; prenons $T \approx 8$ s ; on

[1] $\theta(0)$ peut être la température ambiante de la pièce dans laquelle s'est déroulée l'expérience ou bien légèrement supérieure si la main a été mise au contact de la sonde une seconde avant le début de l'acquisition.

observe alors que $f(2T) \approx 0{,}25$ et $f(3T) \approx 0{,}125$, ce qui amène à poser : $f(kT) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$.
On constate que la fonction cherchée coïncide, sur les multiples de 8 (à peu de chose près), avec une suite géométrique. En serait-il de même avec tous les entiers ?

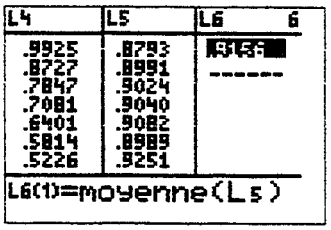
c) Etude des termes consécutifs de la suite $(f(n))$ des mesures de température à chaque seconde

Calculons, pour les vingt cinq premiers termes de la suite des mesures, le rapport de deux termes successifs : $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ en liste L_5 : L_5 = suite($L_4(N+1) / L_4(N)$, N , 1 , 25).



	c4	c5	c6
1	.99248	.87931	.91558
2	.87271	.89914	
3	.78468	.90245	
4	.70814	.90399	

r1c6=moyenne(c5)



L4	L5	L6 6
.9925	.8793	
.8727	.8991	------
.7847	.9024	
.7081	.9040	
.6401	.9082	
.5814	.8989	
.5226	.9251	

L6(1)=moyenne(L5)

Ce rapport pratiquement constant de valeur moyenne 0,916 (demandée dans la cellule $L_6(1)$) montre que les termes successifs $f(n)$ sont en progression géométrique :

$f(n+1) = 0{,}916 f(n)$ et donc, pour tout entier naturel n, $f(n) = f(0) \cdot 0{,}916^n$.

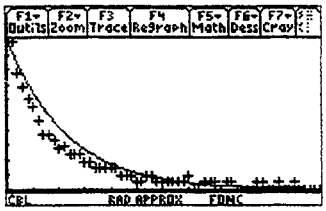
Remarque, qui nécessite la connaissance de la fonction racine n-ième :

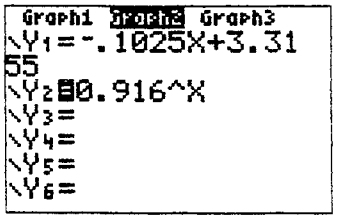
On a vu au b) ci-dessus que le modèle recherché est une fonction f qui doit vérifier $f(kT) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ pour tout k entier, avec T=8, c'est-à-dire $f(8k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$;

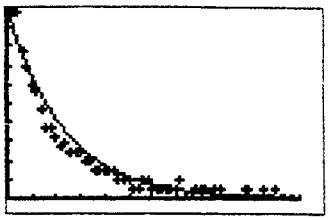
alors, en posant n = 8k, $f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{8}} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8}}\right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right)^n$ avec $\frac{1}{\sqrt[8]{2}} \approx 0{,}917$. On constate que la relation $f(n) = \alpha^n$ avec $\alpha = \frac{1}{\sqrt[8]{2}}$ établie au b) pour les multiples de 8 (n=8k, k entier naturel) est en fait vérifiée par tous les entiers naturels. Qu'en est-il pour les rationnels ?

On peut montrer que pour tout rationnel $\frac{p}{q}$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = \alpha^{\frac{p}{q}}$ (2).

Le modèle f cherché vérifie donc $f(n) = \alpha^n$ pour les entiers, et plus largement $f(r) = \alpha^r$ pour les rationnels. La calculatrice (qui travaille avec ces rationnels particuliers que sont les décimaux) permet d'évaluer graphiquement l'adéquation du modèle analytique aux données par superposition du graphe expérimental et de la représentation graphique du modèle $f : t \longmapsto 0{,}916^t$.







Faisons le point : on a montré que si une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifie $f(0) = 1$ et $f' = a\,f$ alors il existe un réel α (égal à $f(1)$) tel que pour tout rationnel r, $f(r) = \alpha^r$.

L'existence d'une telle fonction f est admise provisoirement, ce qui revient à dire que l'on peut construire $f(x)$ pour tout réel x (et pas seulement pour x rationnel !) L'unicité d'une telle fonction s'établit aisément[2].

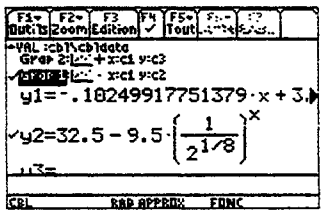
f a de plus la propriété suivante : pour tous réels x et y, $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$[2], ce qui légitime l'extension de la notation $f(r) = \alpha^r$ aux réels non rationnels : $f(x) = \alpha^x$ avec $\alpha = f(1)$.

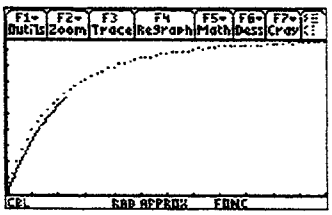
Les résultats établis ici pour a = -0,1025 (nombre lié à l'expérience) s'étendent à tout réel a non nul.

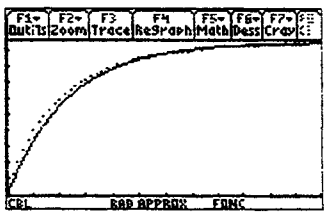
Retour au relevé initial des températures : vérifions l'adéquation du modèle analytique qui vient d'être construit au graphe des mesures expérimentales ; on a défini par anamorphose $f(t) = \dfrac{32{,}5 - \theta(t)}{9{,}5}$ et on vient de mettre en place le modèle : $f(t) = \alpha^t$. On en déduit : $\theta(t) = 32{,}5 - 9{,}5\,\alpha^t$ avec $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[8]{2}} \approx 0{,}917$.

On peut suivre l'adéquation du modèle au nuage des mesures expérimentales :

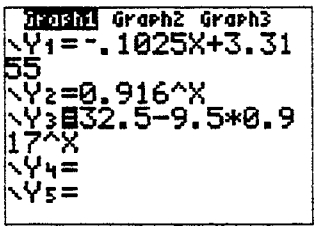
Sur TI 89

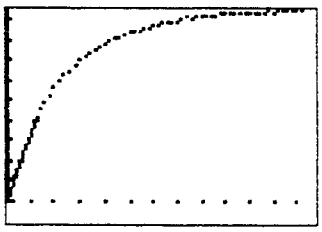


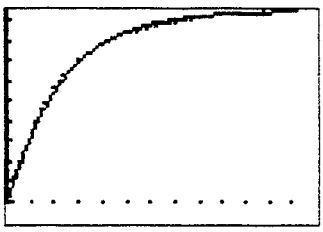




Sur TI 83







d) Expression du modèle f à l'aide de l'exponentielle naturelle et nouvelle confrontation au relevé initial des températures

1. Relation entre les solutions des équations $y' = a\,y$ et $y' = y$

[2] Ces propriétés peuvent être établies dans le cadre du cours de mathématiques ou faire l'objet d'un travail à la maison.

On s'intéresse ici au lien entre le coefficient de proportionnalité a qui lie f' et f ($f' = a\,f$) et le nombre $f(1)$, noté précédemment α, sur lequel s'appuie l'expression $f(x) = \alpha^x$ pour x réel.

Ce lien découle en fait de l'étude d'un cas particulier, celui où le où le coefficient de proportionnalité est 1. En effet, une fonction φ est solution de l'équation différentielle $y' = y$ avec $y(0)=1$ si et seulement si la fonction f définie par $f(x) = \varphi(ax)$ est solution de $y' = a\,y$ avec $y(0)=1$ (la formule de dérivation de la composée $\varphi(ax+b)$ du cours de première le montre aisément).

On a alors $\alpha = f(1) = \varphi(a)$ et comme φ est solution de l'équation $y' = y$ (cas particulier de $y' = a\,y$ pour $a=1$), on peut écrire pour tout réel x, $\varphi(x) = (\varphi(1))^x$ et donc $\alpha = \varphi(a) = (\varphi(1))^a$. Finalement l'expression analytique de $f(x)$ pour tout réel x est liée au réel $\varphi(1)$: $f(x) = \varphi(ax) = (\varphi(1))^{a\,x}$.

2. Une introduction du nombre « *e* » par la méthode d'Euler simulant un découpage plus fin des intervalles de temps.

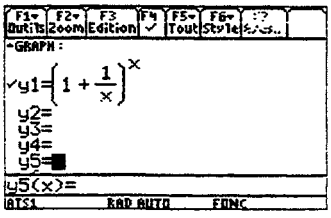
Découpons l'intervalle [0,1] en n intervalles de même longueur 1/n et appliquons la méthode d'Euler à la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(0)=1$ et $\varphi' = \varphi$ afin de déterminer une approximation de $\varphi(1)$; on obtient la suite de valeurs approchées :

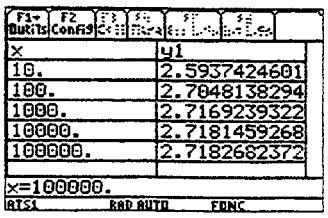
$$\varphi(\tfrac{1}{n}) \approx \varphi(0) + \tfrac{1}{n}\varphi'(0) = 1 + \tfrac{1}{n}$$

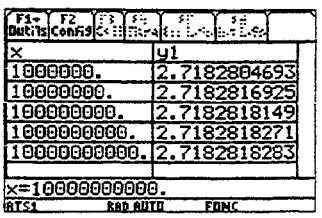
$$\varphi(\tfrac{k+1}{n}) \approx \varphi(\tfrac{k}{n}) + \tfrac{1}{n}\varphi'(\tfrac{k}{n}) = \varphi(\tfrac{k}{n}) + \tfrac{1}{n}\varphi(\tfrac{k}{n}) = \varphi(\tfrac{k}{n})\,(1 + \tfrac{1}{n}).$$

En notant u_k la valeur approchée, par la méthode d'Euler, de $\varphi(\frac{k}{n})$ pour k entier non nul, on a : $u_{k+1} = u_k \,.\, (1 + \frac{1}{n})$: (u_k) est une suite géométrique de raison $1 + \frac{1}{n}$, de premier terme $u_1 = 1 + \frac{1}{n}$. Alors, $u_k = (1 + \frac{1}{n})^k$.

En particulier, pour $k = n$, $(1 + \frac{1}{n})^n$ est une approximation de $\varphi(\frac{n}{n})$, c'est-à-dire de $\varphi(1)$. Notons $v_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ (Attention : les suites u et v ne sont pas égales ; seul le terme d'indice n est identique !). L'observation de la liste des termes de la suite (v_n) pour n égal à 10^p, pour p variant de 1 à 10 (par exemple) permet de conjecturer son sens de variation et permet d'envisager l'existence d'une limite réelle dont 2,718 serait une approximation par défaut.







On démontre que la suite (v_n) est croissante et majorée[3], ce qui permet de conclure : (v_n) converge ; sa limite est notée e.

$$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

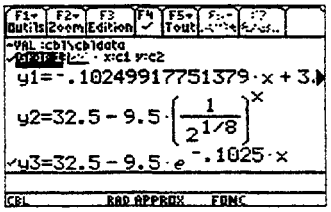
On admet que cette limite est le nombre $\varphi(1)$.

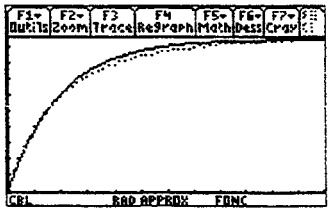
Conséquence : on dispose maintenant d'une écriture de $\varphi(x)$, où φ est la solution de l'équation différentielle $y' = y$ telle que $y(0)=1$:
pour tout réel x, $\varphi(x) = e^x$. φ est appelée fonction exponentielle naturelle et notée exp.

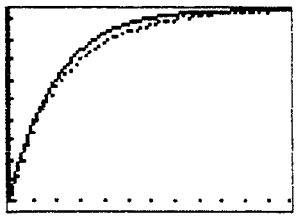
f étant la solution de l'équation différentielle $y' = a\,y$ telle que $y(0)=1$, on a alors :
pour tout réel x, $f(x) = \varphi(a.x) = e^{a.x}$.

3. Confrontation de l'expression exponentielle du modèle aux mesures initiales de température

L'évolution de la température a été modélisée par l'équation différentielle $\theta' = a\,\theta + b$ avec $a \approx -0{,}1025$ et $b \approx 3{,}3155$ et la condition initiale $\theta(0) = 23$; on a introduit par anamorphose (paragraphe 4) la fonction $f = \frac{32{,}5 - \theta}{9{,}5}$ solution de $y' = a\,y$ telle que $f(0)=1$. D'après ce qui précède, $f(t) = e^{a.t}$ et $\theta(t) = 32{,}5 - 9{,}5\,e^{a.t}$.
Validation graphique du modèle :







Remarque : deux modèles ont été mis en place pour décrire une même suite de mesures expérimentales :

$\theta(t) = 32{,}5 - 9{,}5\,\alpha^t$ avec $\alpha = \frac{1}{\sqrt[8]{2}} \approx 0{,}917$ (paragraphe 4.c)

et $\theta(t) = 32{,}5 - 9{,}5\,e^{a.t}$ avec $a \approx -0{,}1025$ (paragraphe 4.d.3).

En fait il s'agit du même modèle, car $\alpha = e^a$ (et donc $\alpha^t = e^{a.t}$), mais pas tout à fait quand même, comme le montrent les approximations assez différentes : $e^{-0{,}1025} \approx 0{,}903$ alors que $\alpha \approx 0{,}917$. Cela provient du fait que les nombres a et α ont été choisis (et définis) par des approches différentes :

- le réel a de l'équation différentielle modélisant l'évolution de température a été obtenu par régression linéaire d'un nuage de points (paragraphe 2.b) ;
- le réel α modélisant f sous la forme $f(n) = \alpha^n$ (n entier naturel) puis $f(x) = \alpha^x$ (x réel positif) (paragraphe 4.c) a été obtenu par lecture graphique ou numérique de la demi vie de l'évolution de f.

On perçoit bien la tâche du « chercheur physicien-mathématicien » qui essaie de trouver d'une part un modèle pertinent pour décrire un phénomène évolutif (ici une équation différentielle $y' = a\,y + b$), d'autre part des coefficients numériques permettant d'expliciter ce modèle ; l'équation différentielle étant mise en place, sa résolution consiste à expliciter son unique solution.

[3] Cette étude peut faire l'objet d'un travail à la maison.

5. Conclusion

Cette approche pédagogique de l'équation différentielle $y' = a\,y + b$, et de ses résolutions numérique et analytique est très enrichissante car elle associe :

- les techniques expérimentales des sciences physiques avec la recherche du lien de cause à effet ;
- les analyses théoriques classiques des mathématiques sur les nombres dérivés, les suites, la recherche de fonctions continues et dérivables adéquates ;
- l'utilisation conviviale et interactive des outils informatiques (tableur, grapheur en particulier).

L'étude de la radioactivité n'est pas proposée ici, car elle exige beaucoup plus de données pour établir une moyenne et s'abstraire de l'aspect aléatoire, qui masque dans un premier temps les phénomènes de décroissance à long terme.

Un deuxième exemple d'évolution temporelle d'un système est brièvement décrit dans l'annexe E : il s'agit de la mesure de la tension U aux bornes d'un condensateur de capacité C en fonction du temps t, pendant sa décharge dans une résistance R. La modélisation s'effectue en suivant la même démarche que dans l'exemple ci-dessus ; elle réalise une adéquation plus précise encore aux données expérimentales.

Puisse cette contribution collective apporter d'utiles éléments de réflexion pédagogique !

Note au sujet des annexes B et C : les documents présentés sont des fiches de TP destinées aux élèves ; elles ont été expérimentées, sous cette forme, dans une classe de terminale S équipée de calculatrices TI 89 (rappelons la possibilité d'emprunter une valise de calculatrices du modèle de son choix pour une période de quelques semaines). Il s'agit donc de documents de travail, susceptibles d'évoluer ; leur seul mérite tient à leur authenticité. Le TP « Euler 1 », plus détaillé, a servi de première initiation à l'utilisation du tableur CellSheet, ce qui explique la présentation moins développée du TP « Euler 2 ».

Annexe A CBL2 « pour les nuls » : mode d'emploi

1. Positionnement du matériel

La calculatrice TI 83 ou 89 se loge à l'intérieur d'un support en matière plastique qui s'adapte sur l'interface CBL2 ; la communication s'effectue par le câble de connexion classique. La TI 92 ou la V200 est reliée à l'interface CBL2 par le câble sans faire intervenir le support.

2. Chargement de l'application DATAMATE d'acquisition de mesures expérimentales

(si ce n'est déjà fait)

Pour tester la présence de cette application sur la calculatrice,

- sur TI 83 taper [APPS] : on doit voir s'afficher DataMate ;
- sur TI 89, 92, V200 taper [VAR-LINK] : on doit voir s'afficher datamate PRGM.

Si votre calculatrice ne contient pas cette application, il suffit de la transférer depuis le CBL2. Avec la TI 89, 92 ou V200, créer au préalable un répertoire « CBL » puis le choisir comme répertoire actif (touche [MODE]).

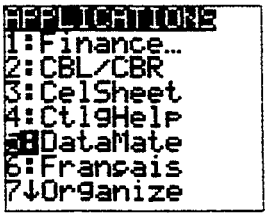
Pour effectuer le transfert de l'application DATAMATE, mettre la calculatrice en mode **réception** (touche [VAR-LINK]), et appuyer sur la touche « TRANSFER » du CBL2. L'application DATAMATE est transmise assez rapidement.

3. Préparation de la prise de mesure

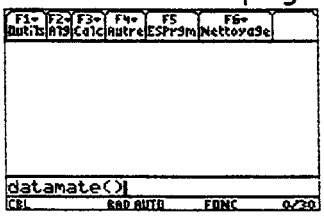
a) Brancher le capteur adéquat : température ou tension dans la voie CH1 du CBL2.

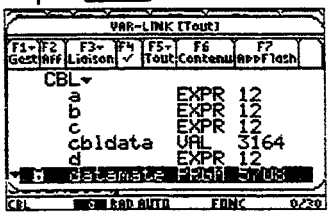
b) Lancer le programme DATAMATE sur la calculatrice ; pour cela :

TI 83 : appuyer sur la touche [APPS] et, à l'aide du curseur, sélectionner DATAMATE et valider par [ENTER].

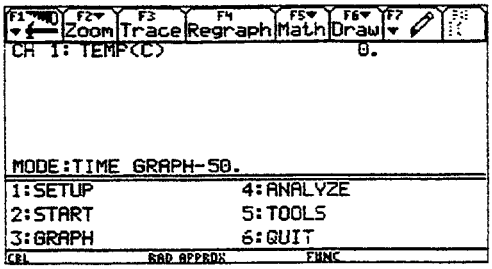


TI 89, 92 et V200 : taper sur la ligne d'édition de l'application [HOME] : datamate() ou bien aller chercher le nom du programme datamate dans [VAR-LINK], taper [ENTER] après l'avoir sélectionné et penser à refermer la parenthèse. Lancer le programme par [ENTER].





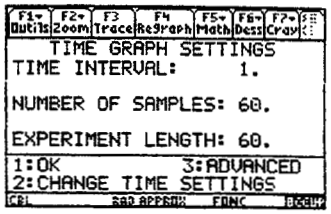
Le capteur est identifié automatiquement en voie CH1, comme le montre l'écran du menu principal datamate ci-contre.



c) Configuration de l'acquisition des mesures (même procédure sur toutes les calculatrices)

- Taper 1:SETUP.
- Descendre le curseur sur MODE, taper [ENTER] et sélectionner l'option 2:TIME GRAPH ; on pourra ensuite choisir l'option 2:CHANGE TIME SETTINGS.

- Modifier à votre guise l'intervalle de temps séparant deux mesures et le nombre total de mesures ; exemple sur l'écran ci-contre.
- Confirmer vos derniers choix par 1:OK et revenir au menu initial.



3. Lancement et fin de l'acquisition.

- Choisir l'option 2:START.
- Un bip sonore annonciateur du début de l'acquisition des mesures retentit au bout d'une ou deux secondes. Démarrer si possible l'expérience (par exemple saisie ferme de la sonde de température) juste avant cette annonce sonore. Les points expérimentaux s'affichent progressivement à l'écran, si le temps entre deux mesures est assez lent. Attendre le deuxième bip sonore annonciateur de la fin des mesures.
- Taper 6:QUIT (ou recommencer l'acquisition si elle ne convient pas).

Les données sont enregistrées dans les listes [L1] (temps) et [L2] (mesures de la voie CH1) pour TI 83 ou, pour les machines TI 89, 92 et V200, dans un fichier de données nommé « cbldata ». Dans les deux cas, les listes [L1] et [L2] ou le fichier cbldata s'ouvrent dans l'éditeur de données ou dans l'application CellSheet (utiliser alors la touche d'édition [F3] et importer les valeurs expérimentales).

Annexe B TP Euler 1 — Construction approchée d'une « courbe intégrale »

(Document élève)

Objectif : on se propose de construire point par point et de façon approchée la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f dont on connaît la valeur $f(a)$ en un point a et la fonction dérivée f'.

Méthode d'Euler : elle repose sur l'approximation $f(a+h) \approx f(a) + h \cdot f'(a)$.

Pour un réel h fixé, cette méthode fournit par itération une suite d'approximations de f sur un intervalle [a,b] (ou [b,a] suivant le signe de h) : $f(a+h)$, $f(a+2h)$, … , $f(a+kh)$, … (k entier naturel). On obtient ainsi une suite de points $A_k(a+kh, f(a+kh))$, dont le premier $A_0(a, f(a))$ est réellement situé sur la courbe $\mathscr{C}$. Graphiquement, la suite de segments reliant deux à deux les points Ak réalise une construction approchée sur [a,b] (ou [b,a]) de la représentation de f (appelée courbe intégrale).

Situation 1 : il s'agit de construire une approximation sur l'intervalle [0,5] de la « courbe intégrale » $\mathscr{C}$ de la fonction f, définie sur $]-1,+\infty[$, qui prend la valeur 1 en 0 (c'est-à-dire telle que $f(0)=1$), et dont la dérivée est donnée par $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$. L'existence et unicité d'une telle fonction f est admise dans un premier temps.

Question 1 a) Que peut-on dire du sens de variation de f ?

b) Dans un repère orthonormal (unité 2 cm), marquer le point A_0 de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse 0 (le seul que l'on connaît !) ; déterminer et tracer la tangente à $\mathscr{C}$ en A_0.

c) En se limitant à l'intervalle [0,5], quel est le point de $\mathscr{C}$ où la tangente a le plus grand coefficient directeur ? Et le plus petit ? En notant b l'abscisse de ce dernier, tracer la parallèle en $B_0(b,0)$ à cette tangente de plus petit coefficient directeur.

Question 2 *Une première construction approchée, avec le pas h=1*

I. Travail « à la main » pour la construction des trois premiers points

a) En appliquant la méthode d'Euler, donner une approximation de $f(1)$ et marquer sur le graphique le point A_1 d'abscisse 1 et d'ordonnée égale à l' approximation de $f(1)$ obtenue. Tracer le segment $[A_0A_1]$: que représente-t-il pour la courbe $\mathscr{C}$?

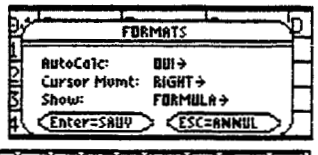
b) Même question pour $f(2)$ à partir de l'approximation de $f(1)$ obtenue précédemment (l'approximation s'écrit : $f(2) = f(1+1) \approx f(1) + 1 \times f'(1)$). Marquer sur le graphique le point A_2 d'abscisse 2 et d'ordonnée égale à l' approximation de $f(2)$ obtenue. Tracer le segment $[A_1A_2]$: que représente-t-il pour la courbe $\mathscr{C}$?

c) Une dernière fois avec $f(3)$; marquer A_3 (le définir) et tracer le segment $[A_2A_3]$: que représente-t-il pour la courbe $\mathscr{C}$?

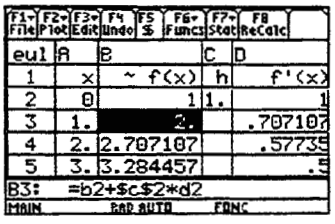
II. Construction des points suivants : utilisation du tableur CellSheet pour l'automatisation des tâches

N.B. Mettre la calculatrice en mode automatique ou approché (touche mode).

a) Ouvrir une nouvelle feuille de calcul : [APPS] CellSheet nouveau nom de variable : « euler1 » (par exemple)
On utilisera quatre colonnes : A pour les valeurs de x (0, 1, 2, 3, 4, 5), B pour les approximations de $f(x)$, C pour le pas h, égal à 1 dans cette question (une seule cellule sera utilisée) et D pour les nombres dérivés $f'(x)$.
Quelques réglages pour une meilleure lisibilité : 1) le format d'affichage : [◆] F voir ci-contre
2) la largeur des cellules : [F3] [8] A et C : largeur 3 B et D : largeur 8



b) ligne 1 : on peut entrer l'intitulé des colonnes, voir écran ci-dessous (facultatif !)
ligne 2 : initialisation $f(0)=1$ autrement dit, pour x=0 on a $f(x)=1$; on rentre ces informations dans les cellules A2 et B2 : A2=0, B2=1 ;
le pas est fixé à h=1 : C2=1[1] ;
enfin la formule $f'(x)$: D2=1/√(1+A2) placera $f'(0)$ en D2.



[1] En mode « auto », l'entrée C2=1 conduit à l'affichage des valeurs exactes, alors que C2=1. (noter le point décimal après le 1) force l'affichage de valeurs approchées décimales.

ligne 3 : formules de calcul : A3= A2+$C$2 pour obtenir 0+h

B3=B2+$C$2×D2 pour l'approximation $f(0+h)=f(0)+h.f'(0)$.

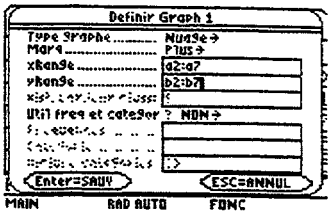
lignes 4 à 7 : extension des formules

- colonne A : 1) sélectionner A3 et copier ; 2) sélectionner la plage A4:A7 ; 3) coller .

(deux méthodes pour sélectionner une plage : sélectionner A4, presser [↑] et descendre le curseur [↓] jusqu'à A7, ou bien : [F3] [2] : sélectionner plage a4:a7)

- colonne D : sélectionner D2, copier, coller vers D3:D6
- colonne B : sélectionner B3, copier, coller vers B4:B7

c) graphique : configuration tracé : [F2] [1] sélectionner un graphique, graph1 par exemple puis [F1] choix voir ci-contre ;



choix d'une fenêtre : [WINDOW] [-1;5]×[0;4.5] xscl=0.25 yscl=0.5 par exemple ;

affichage du graphique : [GRAPH] .

Question 3 *Une deuxième construction approchée, avec le pas h=0,1*

Procéder de même avec une nouvelle feuille « euler2 » ; pour obtenir une construction approchée de la courbe intégrale sur [0,5], il faudra, avec ce nouveau pas, étendre les formules aux plages A4:A52, D3:D51 et B4:B52. On sélectionnera un nouveau graphique, graph2, et par [F1] on choisira la marque « point » et la plage A2:A52 , B2:B52.

Question 4 En confrontant le nuage de 51 points obtenu à la question 3 au catalogue des fonctions de référence, reconnaître un modèle approchant ce nuage. A l'aide des formules de dérivation, trouver la fonction f dont la dérivée est $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ et telle que $f(0)=1$.

Afficher sa représentation graphique dans l'éditeur de fonction [Y=] en la superposant aux deux graphiques précédents (il suffit de ne pas désélectionner graph1 et graph2).

Situation 2

Question 1 Construire en appliquant la méthode d'Euler une approximation sur l'intervalle [1,6], avec le pas h=0,1, de la courbe intégrale $\mathscr{L}$ de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$, telle que $f(1)=0$ et dont la dérivée est la fonction inverse : $f'(x)=\frac{1}{x}$. Ici encore, l'existence et l'unicité d'une telle fonction est admise pour le moment.

Remarque : il suffit de copier la feuille de calcul « euler2 » sous le nom « euler3 » puis, après avoir ouvert ce nouveau fichier, on modifie l'initialisation : $f(1)=0$ soit A2=1, B2=0, on change la formule donnant $f'(x)$ placée en D2 : D2 = 1/A2 et on l'étend à la plage D3:D51[2].

Question 2 Compléter le graphique obtenu à la question 1 par l'approximation de la courbe intégrale $\mathscr{L}$ sur l'intervalle [0,1 ; 1] avec le pas h=-0,1. On veillera à effacer la plage A12 : B52 , de façon à ne calculer que les dix points d'abscisse allant de 0,1 à 1.

Conclusion Dans ce TP, à partir d'une fonction φ donnée ($\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ puis $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ dans les situations 1 et 2) et de deux réels x_0, y_0 donnés dans l'ensemble de définition de φ , on a réalisé une construction approchée de la représentation graphique de la fonction f définie par sa dérivée $f'=\varphi$ et sa valeur y_0 en x_0 ($f(x_0)=y_0$).

On dit que f est solution de l'équation différentielle $y'=\varphi$ avec la condition initiale $y(x_0)=y_0$.

N.B. La question d'existence et unicité d'une telle fonction n'a pas été soulevée ici.

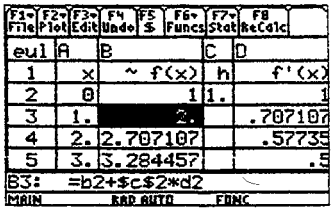
---

[2] Le format « AutoCalc » (voir le premier écran page précédente) relance le calcul à chaque modification, ce qui est long ; on aura intérêt à éviter ce calcul automatique : [◆] F AutoCalc : non. Après avoir modifié A2, B2 et D2 l'actualisation des calculs se fait par [F8] Recalc.

Quelques écrans

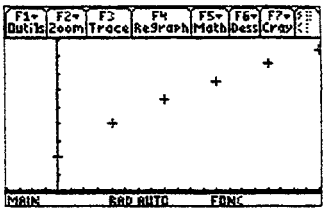
Situation 1 Construction par la méthode d'Euler de la représentation graphique approchée sur [0,5] de la fonction f telle que $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ et $f(0) = 1$

Avec le pas h = 1 : on obtient 6 points ;

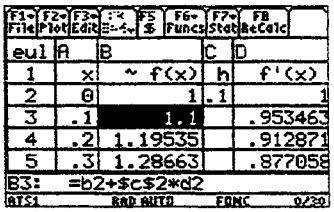


eul	A	B	C	D
1	x	~ f(x)	h	f'(x)
2	0	1	1.	1
3	1.	2.		.707107
4	2.	2.707107		.57735
5	3.	3.284457		.5

B3: =b2+c2*d2

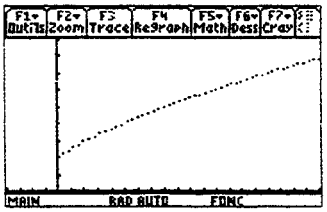


On en obtient 51 avec le pas h = 0,1

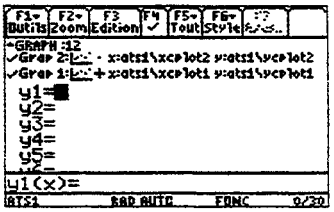


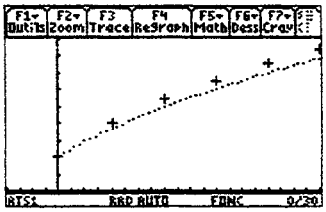
eul	A	B	C	D
1	x	~ f(x)	h	f'(x)
2	0	1	.1	1
3	.1	1.1		.953463
4	.2	1.19535		.912871
5	.3	1.28663		.877058

B3: =b2+c2*d2

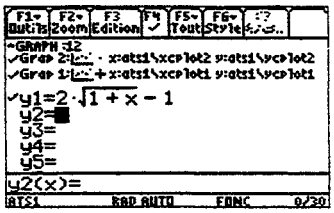


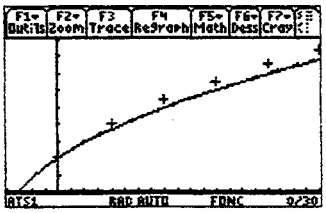
Les deux nuages superposés



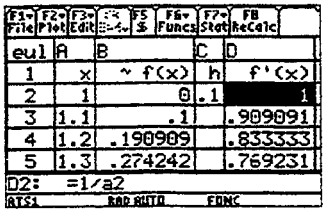


Et la solution exacte !



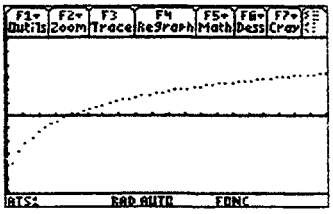


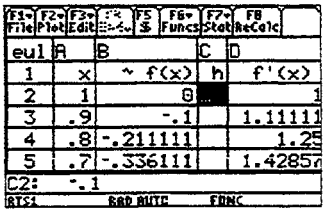
Situation 2 Construction par la méthode d'Euler de la représentation graphique approchée sur [0,1 ; 6] de la fonction f telle que $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $f(1) = 0$



eul	A	B	C	D
1	x	~ f(x)	h	f'(x)
2	1	0	.1	1
3	1.1	.1		.909091
4	1.2	.190909		.833333
5	1.3	.274242		.769231

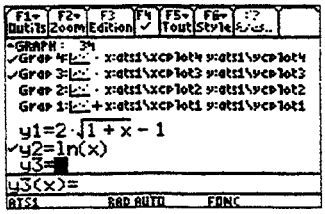
D2: =1/a2

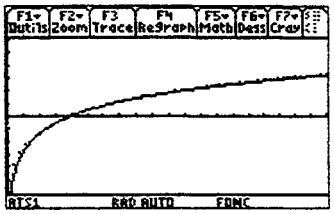




eul	A	B	C	D
1	x	~ f(x)	h	f'(x)
2	1	0		1
3	.9	-.1		1.11111
4	.8	-.211111		1.25
5	.7	-.336111		1.4285

C2: -.1





Construction approchée par la méthode d'Euler de la courbe intégrale des équations différentielles $y' = y$ et $y' = ay + b$ à l'aide du tableur CellSheet

Objectif : on se propose de construire point par point et de façon approchée la représentation graphique $\mathscr{C}$ d'une fonction f satisfaisant aux conditions :

$f(x_0) = y_0$ et $f' = a.f + b$ (a, b, x_0, y_0 sont des nombres réels, $a \neq 0$).

1. L'équation différentielle $y' = ay + b$

a) En utilisant la méthode d'Euler, montrer que $f(x_0+h) \approx f(x_0)(1+a.h) + b.h$.
Trouver de même une approximation de $f(x_0+(n+1)h)$ en fonction de a, b, h et $f(x_0+n.h)$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Application, à l'aide du tableur CellSheet, à l'équation différentielle modélisant l'évolution de la température de la main : $y'=ay+b$ avec $a = -0{,}1025$, $b = 3{,}3155$ et la condition initiale $f(0) = 23$ (température à l'instant $t = 0$)[1] : construire le nuage de points approchant, selon la méthode d'Euler avec le pas $h = 1$, la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle [0,60].

Quelques indications si nécessaire :

- Ouvrir une nouvelle feuille de calcul (nommée « euler 2 » par exemple) : on placera le temps en colonne A ($0 \leq t \leq 60$), les approximations de $f(t)$ en colonne B, le pas h en C et les réels a et b en D et E respectivement.
- L'écran ci-contre présente l'initialisation de la feuille de calcul : choix de x_0 : A(2) = 0, choix de y_0 : B(2) = 23, choix de h : C(2) = 1, choix de a : D(2) = -0,1025, choix de b : E(2) = 3,3155.
- Quelle formule mettre en A3, pour qu'en la dupliquant sur la plage A4 : A62, on obtienne la liste des instants de 1 à 60 ?
- Même question en B3 pour obtenir les approximations de $f(n.h)$ pour $0 \leq n \leq 60$. Compléter le tableau (plage A4 : B62)
- Configurer le graphique et l'affichage de deux nuages : celui établi à la suite de l'acquisition des mesures (graph 1) et celui obtenu à partir de la feuille de calcul ci-dessus.

equ	A	B	C	D	E
1	t	~ θ(t)	h	a	b
2	0	23	1	-.103	3.316
3	1				
4	2				
5	3				

B1: "~ θ(t)"

2. Cas particulier ($a = 1$, $b = 0$) : l'équation différentielle $y' = y$

a) Soit (y_n) la suite des approximations, par la méthode d'Euler avec le pas h, de la solution f de l'équation différentielle $y' = y$ satisfaisant à la condition initiale $y(0) = 1$ (l'existence et l'unicité de f sont ici admises) : la condition initiale donne $y_0 = 1$ (valeur exacte) et y_n est l'approximation de $f(0+n.h)$, c'est-à-dire de $f(n.h)$.
Exprimer y_{n+1} en fonction de y_n et montrer que la suite (y_n) est une suite géométrique de raison $1+h$; en déduire pour tout entier naturel n l'expression de y_n en fonction de h.

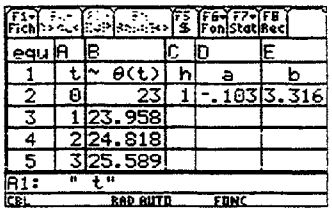
b) Construire la représentation graphique approchée sur [0,3] de la solution de l'équation différentielle $y' = y$ satisfaisant à la condition initiale $y(0) = 1$. (On observera qu'il suffit de changer les valeurs initiales de la feuille de calcul précédente : B2 = 1 (valeur de $f(0)$), C2 = 0,05 (choix de h), D2 = 1 (réel a) et E2 = 0 (réel b).
Faire ensuite afficher simultanément la représentation graphique de l'exponentielle naturelle.

[1] On choisit ici les valeurs obtenues à la suite de l'expérimentation (paragraphe 2.b)

Quelques éléments de réponse

Question 1 : résolution approchée par la méthode d'Euler de l'équation différentielle modélisant l'évolution de la température de la sonde placée dans la main.

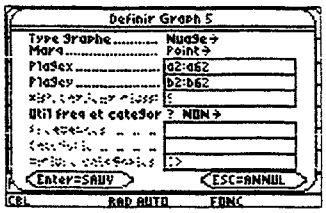
A3 = A2 + $C$2 B3 = B2 + $C$2 × ($D$2 × B2 + $E$2)

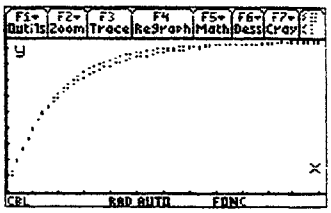


	equ	A	B	C	D	E
1		t	~ θ(t)	h	a	b
2		0	23	1	-.103	3.316
3		1	23.958			
4		2	24.818			
5		3	25.589			

A1: " t"

CBL RAD AUTO FONC



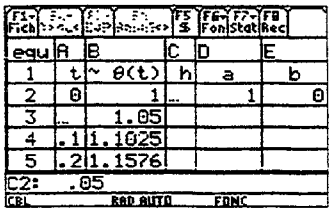


Question 2 : résolution approchée par la méthode d'Euler de l'équation différentielle y'=y avec y(0)=1

$f((n+1)h) = f(n.h + h) \approx f(n.h) + h \,.\, f'(n.h) = f(n.h) + h \,.\, f(n.h) = f(n.h)\,(1+h)$;

on a donc : $f((n+1)h) = f(n.h)\,(1+h)$

soit : $y_{n+1} = y_n \,.\, (1+h)$ On en déduit : $y_n = y_0 \,.\, (1+h)^n = (1+h)^n$

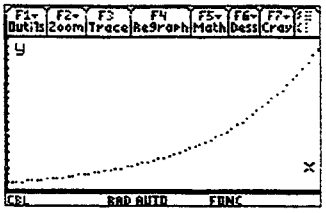


	equ	A	B	C	D	E
1		t	~ θ(t)	h	a	b
2		0	1	.05	1	0
3		.05	1.05			
4		.1	1.1025			
5		.2	1.1576			

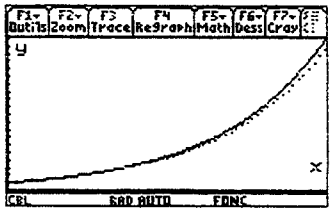
C2: .05

CBL RAD AUTO FONC

La feuille de calcul de la question 1 avec les nouvelles valeurs initiales,



la « courbe » intégrale approchée de y'=y avec y(0)=1
la fenêtre d'affichage est :
[0,3]×[0,20]



et l'affichage simultané de l'exponentielle naturelle.

Annexe D : Méthode d'Euler programmée sur TI 83 et TI 83+.

Des programmes généraux traitant de la méthode d'Euler ont été proposés par ailleurs ; celui présenté ci-dessous a été rédigé pour cette expérimentation et n'utilise que le tableur standard L1 à L6 de la TI 83.

Un double objectif :
* tracer le graphe de la fonction y solution de l'équation : $y' = a.y + b$
pour le comparer au graphe trouvé par l'expérience.
* compléter l'éditeur de liste avec les valeurs calculées de Y en L6, pour les comparer facilement aux valeurs expérimentales logées en L2.

a) Organigramme du programme de recherche pas à pas des valeurs de la fonction y respectant l'équation $y' = a.y + b$ par la méthode d'Euler.

Introduire successivement les données de départ :
la date initiale t_0, la valeur initiale de la fonction y_0 , les coefficients a et b de l'équation différentielle trouvés par l'exploitation de l'expérimentation, le pas du calcul Δt choisi, la fenêtre d'affichage (en abscisse : dates extrêmes de la modélisation et en ordonnée : valeurs extrêmes de la fonction).
Le programme calcule de lui-même la graduation des axes.
Il efface les listes L5 et L6 pour recevoir les dates et les valeurs successives de la fonction calculées pas à pas .
Il inscrit les valeurs initiales (date et valeur de la fonction) dans les cellules L5(1) et L6(1),
Dans une boucle stoppée à la date finale tmax, il affiche le graphe du point courant, calcule pas à pas la nouvelle valeur de la fonction y en exploitant l'équation différentielle pour un accroissement du temps Δt assez petit, et réactualise la date et l'indice des cellules des listes.
Voici la base de ce calcul :

$$y(n+1) = y(n) + a.y(n).\Delta t + b.\Delta t$$
$$I = I + 1$$
$$t(n+1) = t(n) + \Delta t.$$

b) Listing du programme pour Ti 83 et TI 83 +.

```
Input " DATE T0 ", T
Input " A DE DY/DT = AY + B ", A
Input " B ", B
Input " ETAT INI Y0 ", E
Input " PAS DT ", S
Input " TEMPS MAX ", Xmax
T→ Xmin
(Xmax - T)/10 → Xgrad
E → Ymin
Prompt Ymax
(Ymax - Ymin)/10 → Ygrad
Effliste L5, L6
1 → I
T → L5( I)
E → L6(I)
While T < Tmax
Pt-Aff( T, E)
E + AES + BS → E
I + 1 → I
E → L6(I)
T + S → T
T → L5(I)
End
```

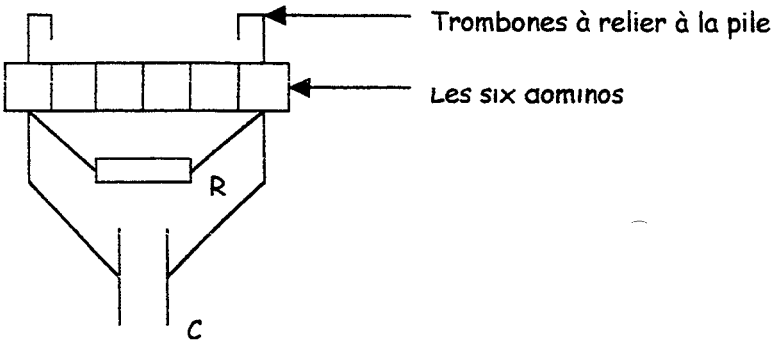
c) Conclusion

Ce programme est très intéressant quand le graphe expérimental est actif, car il permet la comparaison directe du modèle et de l'expérience.
Il peut être relancé plusieurs fois en modifiant certains paramètres et favorise l'interactivité et la réflexion.
En l'absence de CellSheet , il remplit l'éditeur de listes et permet de comparer l'ensemble des valeurs expérimentales aux valeurs calculées par la méthode d'Euler.

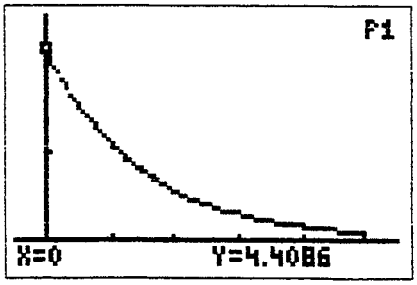
La présentation du programme éclaire bien les bases de cette méthode.

Annexe E Etude de la décharge d'un condensateur à travers une résistance

a)Mesure de la tension u aux bornes du condensateur de capacité C, pendant sa décharge dans une résistance R.



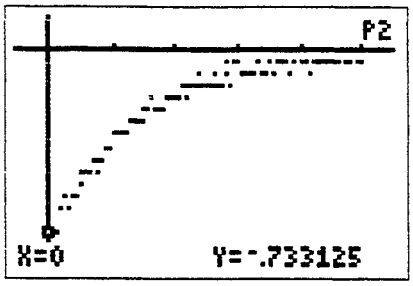
Le montage expérimental utilise 6 dominos d'électricité accolés .
Aux extrémités, deux trombones, en partie déformés, assurent le branchement et le débranchement facile d'une pile plate de 4.5V .
Les extrémités du condensateur et de la résistance, sont directement reliés aux deux trombones. Dès que la pile est enlevée, le condensateur commence sa décharge dans la résistance .
Le temps total de la décharge exprimé en seconde est prévisible car il est voisin du produit 5.R.C .
Avec ce montage simple, l'acquisition automatique des mesures de tension du condensateur peut se dérouler devant une classe entière.
Exemple proposé ici : R = 5600 ohms et C = 1000μF avec 100mesures de tensions séparées de 0.2s.



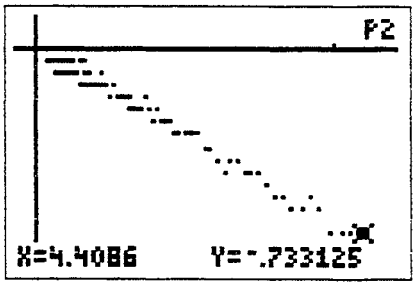
La tension initiale u0 caractérise la différence d'état électrique des plaques du condensateur créée et maintenue par le générateur.
Cette tension décroît dès qu'on débranche le générateur, car les charges positives sont rejointes par les électrons venus de l'autre plaque à travers la résistance R .
Ce transfert s'effectue de plus en plus lentement , à cause de la baisse progressive de la tension elle même, qui caractérise l' état électrique résiduelle des deux plaques.

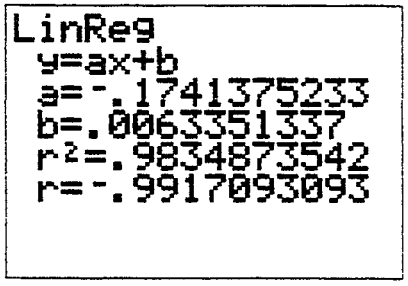
b) Etude du taux de variation de la tension : $\Delta u/\Delta t$ en fonction du temps , puis en fonction de la tension restante u pour établir l'équation différentielle représentative du phénomène de décharge observé.
La tension est en liste L2 et le temps en liste L1 .
Le taux de variation symétrique est calculé en liste L3 :
L3= suite((L2(N+1) - L2(N-1))/(L1(N+1) - L1(N-1)) , N , 2 , 98). Attention, les incertitudes sont amplifiées par ce type de calcul.

Egaliser la dimension des trois listes en supprimant la première et la dernière valeur de L1 et L2, ou en recopiant le premier et le dernier élément de L3 pour rallonger cette liste à la dimension des autres.
La valeur absolue du taux de variation décroît rapidement puis de plus en plus lentement avec le temps.



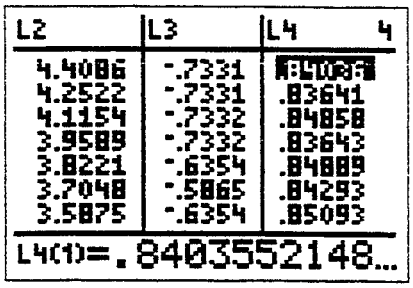
Le taux de variation $\Delta u/\Delta t$, négatif, subit au cours du temps une variation semblable à celle de la tension u elle même et s'annule en même temps que la tension.
On peut supposer qu'il est lié à la tension u par une simple relation de proportionnalité :
$\Delta u/\Delta t = a\,u$.
Pour vérifier cette hypothèse, tracer et analyser le graphe $\Delta u/\Delta t$ en fonction de la tension u.





Ce graphe est linéaire, d'après le calcul de régression.
L'expérience est donc décrite par l'équation différentielle : $\Delta u/\Delta t = -0.174\,u$.
La résolution de cette équation peut s'effectuer par la méthode numérique d'Euler , ou par une approche mathématique analogue à celle déjà développée pour la saisie de température.

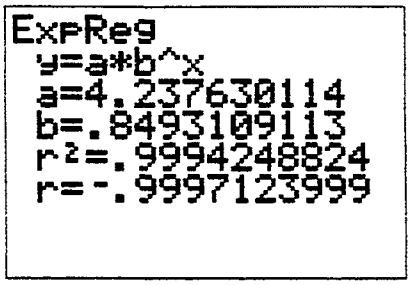
<u>c) Analyse mathématique de la suite des tensions à chaque seconde, pour trouver l'expression analytique de la tension u du condensateur en fonction du temps de la décharge.</u>
On compare, entre elles , les tensions successives à chaque seconde : u(N+5)/u(N) en liste L4 :
L4 = suite(L2(N+5)/L2(N), N,1,95,5) On rappelle que les mesures se succèdent toutes les 0,2 seconde ; la seconde suivant l'instant N est donc N+5.



Le rapport est sensiblement constant et égal à la moyenne des termes de la liste L4.
Donc u(N+5) / u(N) = 0.84.

La tension à chaque seconde forme une suite géométrique décroissante caractéristique de la diminution sans vieillissement de la population des charges électriques logées sur les plaques du condensateur.
La solution pour le terme N est donc : $u(N) = u(0) . 0.84^N$, avec u(0) tension initiale .
N = t est un entier . Cette relation reste vraie avec t réel.

La tension, pendant la décharge, est solution de l'équation différentielle $y' = -0,17\ y$ avec la condition initiale u(0) = 4,3V ; son expression, à l'instant t est donc :
$u(t) = u(0) . 0.84^t = 4,3 . 0.84^t = 4.3\ e^{-0.17t}$
Ces formes exponentielles équivalentes, modélisent bien le comportement du circuit.
Le calcul de régression exponentielle de la calculatrice le confirme.



d) Interprétation physique.
Les lois du circuit électrique, concernant la résistance et le condensateur sont :
$u = Ri$, $q = cu$ et $i = -dq/dt = -C\ du/dt$.
Ces relations conduisent à une équation différentielle : $du/dt + u/RC = 0$, et recoupent bien le cas particulier observé : $du/dt + 0.174\ u = 0$.
Ici : $1/RC = 0,174$.
Attention, dans la pratique, les valeurs nominales de R et C sont mal définies et la capacité de l'interface de saisie joue aussi un rôle.
Au bout d'un temps égal à 5.R.C, l'évolution de la tension est pratiquement achevée.
On peut faire apparaître la constante $\tau = RC$ dans la solution de l'équation différentielle précédente $u(t) = u(0) . 0.84^t = u(0) . e^{-017t} = u(0) . e^{-t/RC}$.
Remarque:
Cette loi de décroissance est précise et permet de définir le temps écoulé depuis le début de la décharge en mesurant la tension restante .
Elle sert de base à la construction pratique de certaines « horloges électroniques simples ».